



Solução de Problemas Convectivos com o Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM)

Renato Barbieri

Pontifícia Universidade Católica do Paraná – PUCPR
Departamento de Engenharia Mecânica
Rua Imaculada Conceição, 1155 – Cx. Postal : 16210
Cep: 80215-901 - Curitiba – Pr
e-mail:barbieri@rla01.pucpr.br tel: (041) 3301321

Resumo. Utiliza-se o Método da Função de Green Local Modificado (MLGFM) para a solução de problemas fortemente convectivos unidimensionais e bidimensionais. É mostrada a formulação discretizada do problema e comparações com resultados obtidos com o método de Elementos Finitos. Especial atenção é dada para os resultados de fluxo no contorno.

Palavras-Chave: MLGFM, Função de Green, Convectivo.

1. INTRODUÇÃO

Até a presente data o MLGFM (Método da Função de Green Local Modificado) foi utilizado para a solução de diversos problemas do contínuo. Os principais tópicos analisados foram: barras, flexão de vigas, problemas de potencial, potencial singular, potencial em meios não homogêneos, elasticidade bidimensional, mecânica da fratura, análise modal da equação de Helmholtz, elasticidade tridimensional, placa fina, placas semi-espessas, cascas semi-espessas e problemas de potencial não lineares.

Os resultados obtidos nos últimos anos, Barbieri & Muñoz R. (1996) e Barbieri & Muñoz R. (1998) , indicam que o método pode ser aplicado com grande vantagem para o cálculo de *fluxos precisos*.

Os resultados descritos a seguir retratam a primeira tentativa de implementar o MLGFM para problemas com operadores diferenciais *de segunda ordem genéricos*.

2. FORMULAÇÃO DO MLGFM PARA OPERADORES DE SEGUNDA ORDEM

Seja a equação de segunda ordem,

$$\mathbf{L}u = A_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + B_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = 0 \quad (1)$$

onde L é um operador diferencial não auto-adjunto, A_{ij} , B_i e C são funções que dependem de x_i , com $i=1,2,3$. Uma forma alternativa de expressar esta equação é, Mei (1995):

$$\mathbf{L}u = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + D_i \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cu = 0 \quad (2)$$

onde $D_i = B_i - \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$.

Considere o produto interno,

$$\begin{aligned} v\mathbf{L}u &= v \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) + D_i v \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cuv \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} v \frac{\partial u}{\partial x_j} \right) - A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} + D_i v \frac{\partial u}{\partial x_i} + Cuv \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[A_{ij} v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j} + D_i uv \right] + u \left[\frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - D_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left(C - \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \right) v \right] \end{aligned} \quad (3)$$

define-se o operador adjunto, L^* , por:

$$\mathbf{L}^*v = \frac{\partial}{\partial x_i} \left(A_{ij} \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) - D_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \left(C - \frac{\partial D_i}{\partial x_i} \right) v \quad (4)$$

tal que:

$$v\mathbf{L}u - u\mathbf{L}^*v = \frac{\partial}{\partial x_i} \left[A_{ij} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + D_i uv \right] \quad (5)$$

Aplicando o teorema de integração de Gauss para esta última equação obtém-se a integral de superfície para o termo do lado direito, isto é:

$$\int_V (\mathbf{v} \mathbf{L} \mathbf{u} - \mathbf{u} \mathbf{L}^* \mathbf{v}) dV = \int_S \left[A_{ij} \left(v \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial v}{\partial x_j} \right) + D_i u v \right] n_i dS \quad (6)$$

onde S é o contorno de V . Esta equação representa a fórmula de Green generalizada para o operador L . Obviamente, se $D_i=0$, então $L=L^*$ e o operador é *auto-adjunto*.

A função de Green, G , pode ser definida com auxílio do *operador adjunto*, i.e.,

$$\mathbf{L}^* G(x_i, x'_i) = \delta(x - x') \delta(y - y') \delta(z - z'), \quad (7)$$

com as devidas condições de contorno prescritas. Nesta expressão, δ representa a *função delta* de Dirac.

Tomando $Lu=b$ e fazendo $v=G$, a equação integral (6) pode ser reescrita como sendo:

$$\int_V (G b - u \delta(\mathbf{x}, \mathbf{x}')) dV = \int_S \left[A_{ij} \left(G \frac{\partial u}{\partial x_j} - u \frac{\partial G}{\partial x_j} \right) + D_i u G \right] n_i dS \quad (8)$$

ou

$$u(\mathbf{x}') = \int_V (G b) dV + \int_S \left[A_{ij} \left(-G \frac{\partial u}{\partial x_j} + u \frac{\partial G}{\partial x_j} \right) - D_i u G \right] n_i dS \quad (9)$$

que é a equação básica para o desenvolvimento do MLGFM.

Sem perda de generalidade, a equação integral acima pode ser escrita em função dos operadores de Neumann do problema original, \mathbf{N} , e do problema adjunto, \mathbf{N}^* ;

$$u(\mathbf{x}') = \int_V (G b) dV + \int_S \left[G(\mathbf{N} u) - u(\mathbf{N}^* G) \right] dS \quad (10)$$

Para eliminar as derivadas da função de Green no contorno, define-se como condições de contorno para a equação *adjunta*, Eq.(7), a quantidade dada por:

$$\mathbf{N}^* G + \mu k_o = 0 \quad (11)$$

onde k_o é uma constante diferente de zero utilizada para melhorar o condicionamento do sistema final de equações. Utilizando a formulação de subregiões, ver detalhes em Barbieri et al. (1994), a constante μ é definida como sendo igual a 1 para os nós internos e 0 para os nós do contorno do problema, Fig.1. Como o operador de Neumann do *problema adjunto* só foi alterado nos nós internos, o valor de $u(\mathbf{x}')$ pode ser reescrito como sendo:

$$u(\mathbf{x}') = \int_V (G b) dV + \int_S [G(\mathbf{N} u)] dS = \int_V (G b) dV + \int_S [GF] dS \quad (12)$$

onde $F=\mathbf{N}u$ no contorno S .

Aproximando $u(V)$, $b(V)$ e $F(S)$ com a base de elementos finitos; $u(V) = \Phi_i(V) q_i$, $b(V) = \Phi_i(V) b_i$ e $F(S) = \phi_i(S) f_i$; e utilizando o método de Galerkin para minimização do resíduo na Eq.(12), os valores nodais de $u(V)$ são obtidos resolvendo o seguinte sistema de equações:

$$\int_{V'} \Phi^t(V') \Phi(V') dV' \mathbf{q} = \int_{V'} \Phi^t(V') \int_V G(V, V') \Phi(V) dV dV' \mathbf{b} + \int_{V'} \Phi^t(V') \int_S G(S, V') \phi(S) dS dV' \mathbf{f} \quad (13)$$

ou, matricialmente,

$$\mathbf{A} \mathbf{q} = \mathbf{C} \mathbf{b} + \mathbf{B} \mathbf{f} \quad (14)$$

sendo

$$\mathbf{A} = \int_{V'} \Phi^t(V') \Phi(V') dV' \quad (15.1)$$

$$\mathbf{B} = \int_S \mathbf{G} d(S) \phi(S) dS \quad (15.2)$$

$$\mathbf{C} = \int_V \mathbf{G} d(V) \Phi(V) dV \quad (15.3)$$

$$\mathbf{G} d(S) = \int_{V'} \Phi^t(V') G(S, V') dV' \quad \text{e} \quad (15.4)$$

$$\mathbf{G} d(V) = \int_{V'} \Phi^t(V') G(V, V') dV' \quad (15.5)$$

Os superscritos \times denotam sistema de coordenadas com origem no ponto \mathbf{x}^\times e \mathbf{q} , \mathbf{b} e \mathbf{f} representam os vetores com valores nodais de u , b e F , respectivamente. As quantidades $\mathbf{G} d(S)$ e $\mathbf{G} d(V)$ representam projeções da Função de Green na base do espaço de elementos finitos gerado por $\Phi_i(V)$.

O mesmo procedimento de minimização do resíduo pode ser aplicado para o contorno e o resultado na sua forma matricial é:

$$\mathbf{D} \mathbf{q} = \mathbf{F} \mathbf{b} + \mathbf{E} \mathbf{f} \quad (16)$$

onde

$$\mathbf{D} = \int_{S'} \phi^t(S') \phi(S') dS' \quad (17.1)$$

$$\mathbf{E} = \int_S \mathbf{G} c(S) \phi(S) dS \quad (17.2)$$

$$\mathbf{F} = \int_V \mathbf{Gc}(V) \Phi(V) dV \quad (17.3)$$

$$\mathbf{Gc}(S) = \int_{S'} \phi^t(S) G(S, S') dS' \quad e \quad (17.4)$$

$$\mathbf{Gc}(V) = \int_{S'} \phi^t(S') G(V, S') dS' \quad (17.5)$$

Analogamente, $\mathbf{Gc}(S)$ e $\mathbf{Gc}(V)$ representam projeções da Função de Green na base do espaço de elementos finitos gerado por $\phi_i(S)$.

O cálculo das projeções da Função de Green; $\mathbf{Gd}(S)$, $\mathbf{Gd}(V)$, $\mathbf{Gc}(S)$ e $\mathbf{Gc}(V)$ é realizado resolvendo com o *Método de Elementos Finitos* os seguintes problemas:

Problema 1:	$L^* \mathbf{Gd}(v) = \Phi(v)$	(18)
	$N^* \mathbf{Gd}(s) + \mu k_o = 0$	$\forall s \in S \text{ e } v \in V.$ (19)

Problema 2:	$L^* \mathbf{Gc}(v) = 0$	(20)
	$N^* \mathbf{Gc}(s) + \mu k_o = \phi(s)$	$\forall s \in S \text{ e } v \in V.$ (21)

Detalhes da obtenção destes dois sistemas de equações podem ser obtidos no trabalho de Barbieri (1992).

Após o cálculo numéricos das projeções da Função de Green, os valores nodais de deslocamentos e forças podem ser obtidos resolvendo as equações (16) e (14). Resolvendo a Eq.(16) obtem-se os valores no contorno de $u(\mathbf{x})$ e F . Após a solução do sistema da Eq.(16) com os valores conhecidos de F no contorno resolve-se o sistema da Eq.(14) para obter os valores nodais de $u(\mathbf{x})$ no domínio (se necessário). Detalhes destes cálculos também podem ser obtidos no trabalho de Barbieri (1992).

3. RESULTADOS NUMÉRICOS

Exemplo 1. Encontrar a solução $u(x)$ para a equação diferencial,

$$k \frac{d^2 u}{dx^2} + A \frac{du}{dx} = 0 \quad \forall 0 \leq x \leq 1,$$

com condições de contorno $u(0)=0$ e $u(1)=1$. A solução analítica é dada por:

$$u(x) = \frac{1 - e^{Ax/k}}{1 - e^{A/k}} \quad e \quad \frac{du(x)}{dx} = - \frac{Ae^{Ax/k}}{k(1 - e^{A/k})}$$

e apresenta um gradiente muito forte em $x=1$ para valores de A/k muito grande.

Com o objetivo de obter projeções da Função de Green isentas de *oscilações*, utilizou-se elementos finitos com formulação Petrov-Galerkin com $\alpha = \alpha_{\text{ótimo}}$, Zienkiewicz & Taylor (1991). A técnica de formulação *elemento por elemento*, Barbieri et. al. (1994), foi utilizada com o MLGFM e o operador auxiliar, μk_o , foi prescrito nos nós internos da malha, Fig.1.

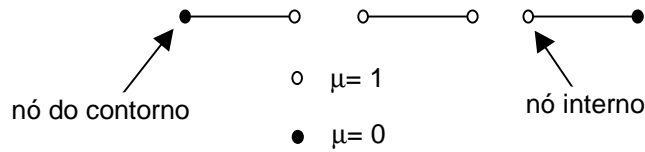


Fig.1- Identificação do Operador Auxiliar.

O problema foi resolvido com malha homogênea de 5 elementos lineares e os resultados de fluxo em $x=1$ estão mostrados na Tab.1. Resultados de $u(x)$ coincidem com os obtidos com os elementos finitos com formulação Petrov-Galerkin, isto é, são *exatos* nos nós.

Tabela 1- Convergência para du/dx em $x=1$, $k=1$.

A	Pe local	k_o					Analítico
		1.E3	1.E4	1.E5	1.E6	1.E12	
20	2,0	19,590678	19,996711	20,003232	20,006829	20,007232	20,0 (8)
50	5,0	47,222205	49,747474	49,974975	49,997499	50,0 (7)	50,0 (>8)

(×) = número de dígitos iguais a 0 após o ponto decimal.

Pe local = $Ah/2k$ onde $h=1/5=0,2$.

Os resultados mostrados na Tab.1 indicam dependência de k_o para os resultados de fluxo. Tal fenômeno não foi observado por Barbieri et. al. (1994) no estudo de problemas de potencial, onde os resultados de fluxo não se alteravam com a mudança do parâmetro k_o . Ainda, os valores nodais de $u(x)$ independem deste parâmetro.

Exemplo 2. Encontrar a solução $u(x,y)$ para a equação diferencial,

$$k_x \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + A_x \frac{\partial u}{\partial x} + A_y \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \quad \forall 0 \leq x, y \leq 1.$$

com condições de contorno $u(0,y)=0$, $u(1,y)=1$ e $\frac{\partial u(x,0)}{\partial y} = \frac{\partial u(x,1)}{\partial y} = 0$.

A solução analítica para este problema é a mesma do anterior e este problema é solucionado com o objetivo de aplicar o MLGFM para os problemas fortemente convectivos bidimensionais.

Este problema foi solucionado com malha homogênea de 10×10 elementos quadrangulares lineares para as aproximações de domínio e malha de contorno correspondente para as aproximações de contorno. Vale a pena salientar que a malha de contorno é elaborada com nós duplos em pontos de descontinuidade da normal.

O elemento finito utilizado para aproximar as projeções da Função de Green é obtido com a formulação proposta por Guymon et al. (1970) para que as *oscilações* presentes para alto número de Pe_{local} sejam evitadas. É interessante salientar que as aproximações da Função de Green foram obtidas a nível global, isto é, com o cálculo tendo como base todo o domínio e não o elemento como no caso anterior. Para esta situação, o operador adicional no contorno somente foi colocado onde existem condições de Dirichlet homogêneas, ver maior detalhes em Barbieri (1992).

Como já era esperado, o erro em deslocamentos é nulo, pois o elemento finito que aproxima as projeções da Função de Green apresenta características de superconvergência nodal de deslocamentos. Entretanto, o mesmo resultado não foi obtido para fluxo no contorno, como mostra a Tab.3. Mesmo assim, estes resultados podem ser considerados muito bons comparado com os obtidos com o FEM usando derivadas das funções de interpolação.

Tabela 2- Valores nodais de $u(x,0)$. $k_x=k_y=1,0$. $A_x=A_y=10,0$.

x	u(x) - Analítico	u(x) - MLGFM
0,1	7,80134161274E-05	7,801341613D-05
0,2	2,90075867561E-04	2,900758676D-04
0,3	8,66521375793E-04	8,665213758D-04
0,4	2,43346272591E-03	2,433462726D-03
0,5	6,69285092421E-03	6,692850924D-03
0,6	1,82710684640E-02	1,827106846D-02
0,7	4,97439268083E-02	4,974392681D-02
0,8	1,35296025735E-01	1,352960257D-01
0,9	3,67850741635E-01	3,678507416D-01

Tabela3- Resultados de $\frac{\partial u}{\partial x}$ em $y=1$. Comparativo: MLGFM×FEM×Analítico.

X	Analítico	MLGFM	FEM
0	4,54019E-4	4,93128E-4	7,80134E-4
1	10,000454E+0	10,86210E+0	6,3215E+0

4. CONCLUSÃO

Esta primeira implementação do MLGFM para a solução de problemas condutivos e fortemente convectivos obteve sucesso e foi marcada pelos seguintes aspectos:

- O MLGFM foi implantado com sucesso para problemas de segunda ordem com operadores diferenciais genéricos;
- Os resultados de fluxo no contorno são superiores aos obtidos com o FEM com mesma malha e com o pós-processamento de fluxo oriundo das derivadas das funções de interpolação;
- Acredita-se que a dependência do parâmetro k_o (operador auxiliar prescrito pelo usuário) mostrada na Tab.1 esteja associada ao mal condicionamento numérico do sistema final de equações. Mesmo assim, resultados relativamente bons foram obtidos para todos os valores de k_o mostrados nesta tabela; e
- Novas alternativas de aproximar as projeções da Função de Green já estão sendo estudadas com o objetivo de eliminar a dependência destas aproximações da qualidade do elemento finito utilizado e reduzir o tempo de processamento.

5. REFERÊNCIAS

- Chiang C. Mei. 1995. *Mathematical Analysis in Engineering. How to Use the Basic Tools.* Cambridge University Press.
- G.L.Guymon, V.H. Scott and L.R. Hermann. 1970. A general Numerical solution of the two dimensional diffusion-convection equation by the finite element method. *Water Resources Res.*, 6, 1611-17.
- O.C.Zienkiewicz & R.L.Taylor. 1991. *The Finite Element Method. Vol.2 – Solid and Fluid Mechanics Dynamics and Non-Linearity.* 4^a Ed. Mc Graw-Hill Book Company Europe (UK).
- R. Barbieri. 1992. *Desenvolvimento e Aplicação do MLGFM para problemas do Meio contínuo.* Tese de Doutorado. UFSC.
- R. Barbieri & P.A. Muñoz Rojas. 1998. Modified Local Green's Function Method (MLGFM) Part II.- Application for accurate flux and traction evaluation. *Eng. Analysis with Boundary Elements*, Vol.22, 153-159.
- R. Barbieri & P.A. Muñoz Rojas. 1996. Flux analysis for potential problems using the Modified Local Green's Function method. *ENCIT/LATCYM.*
- R.Barbieri, R.D. Machado, C.G. Filippin & C.S. Barcellos. 1994. MLGFM-A formulation for subregions. *XV CILAMCE - Belo Horizonte.*

MODIFIED LOCAL GREEN'S FUNCTION METHOD (MLGFM) FOR DIFFUSION-CONVECTION ANALYSIS

Abstract. The Modified Local Green's Function Method (MLGFM) is an integral numerical technique that has been used to solve several problems of continuum mechanics in the last decade (potentials, bidimensional and tridimensional elasticity, Mindlin's plate bending, thick shells analysis, singular problems and others). This method may be understood as an extension of the Galerkin Boundary Element Method, and its main feature is to make use of the properties of a Green's Function Projection associated to the problem, without its explicit knowledge. In this work, the MLGFM is applied for the first time to solve conductive-convective problems. Numerical examples explain the good flux convergence on boundary.

Keywords: Green's Function, Local Green's Function, Convective